

授课教师	林麦麦	授课名称	数学的智慧与乐趣	授课班级		授课地点				
授课时数	2学时	课程类型	大学科综合课	授课时间						
章节名称	第六章 递推 循环 回归									
参考资料	<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 33%; vertical-align: top;"> 《乐在其中的数学》  《啊哈！原来如此（中译本）》  《生活中的魔法数学》  《思考的乐趣：Matrix67 数学笔记》  《数学与对称》 </td> <td style="width: 33%; vertical-align: top;"> 谈祥柏 著  （美）伽德纳 著；李建臣，刘正新 译  （美）亚瑟·本杰明，迈克尔·谢尔默 著 李旭大 译  顾森 著  丘成桐，刘克峰，杨乐 著 </td> <td style="width: 33%; vertical-align: top;"> 科学出版社  科学出版社  中国传媒大学出版社  人民邮电出版社  高等教育出版社 </td> </tr> </table>							《乐在其中的数学》 《啊哈！原来如此（中译本）》 《生活中的魔法数学》 《思考的乐趣：Matrix67 数学笔记》 《数学与对称》	谈祥柏 著 （美）伽德纳 著；李建臣，刘正新 译 （美）亚瑟·本杰明，迈克尔·谢尔默 著 李旭大 译 顾森 著 丘成桐，刘克峰，杨乐 著	科学出版社 科学出版社 中国传媒大学出版社 人民邮电出版社 高等教育出版社
《乐在其中的数学》 《啊哈！原来如此（中译本）》 《生活中的魔法数学》 《思考的乐趣：Matrix67 数学笔记》 《数学与对称》	谈祥柏 著 （美）伽德纳 著；李建臣，刘正新 译 （美）亚瑟·本杰明，迈克尔·谢尔默 著 李旭大 译 顾森 著 丘成桐，刘克峰，杨乐 著	科学出版社 科学出版社 中国传媒大学出版社 人民邮电出版社 高等教育出版社								
教学目标	一、知识和技能目标： 1. 要求学生能够通过学习了解古今中外的典型趣味问题； 2. 要求学生能够通过具体问题的深入探讨，初步了解并掌握递推、循环与回归的基本思想方法在数学方面的基础应用。									
	二、过程和方法目标： 1. 注意借助具体问题，引入数学中递推、循环和回归的基本思想方法、基础趣味问题，广泛开阔学生的眼界； 2. 通过具体的深入探讨，有效激发学生对数学学科的浓厚兴趣。									
教学重点	古今中外数学学科的典型趣味问题									
教学难点	问题的起源背景、一般解决思路与技巧性处理方法									

<p><b>学习内容分析</b></p>	<p>“第六章 递推 循环 回归”是《数学的智慧与乐趣》的基础内容，本章的主要内容将促使学生初步了解并深刻理解数学趣味问题的基本起源、一般解决思路和具体的趣味性解决方案。对于首次接触本门课程的学生而言，利用直观、具体且易于理解的数学趣题，展示数学问题的技巧性解决过程至关重要。这将帮助学生有效地激发对数学的学习兴趣，良好地掌握数学问题解决的基本思想、定义内涵及其趣味解决过程。</p>
<p><b>学生分析</b></p>	<p>授课教师通过新课内容的引入介绍，帮助学生有效扭转以往认为数学“枯燥、无聊”，只有“计算、证明”，甚至是“题海、题库”的基本印象。关于古今中外各类趣味数学问题的解决思路探讨、具体步骤实施、数学工具应用的详细介绍，将激发学生对数学问题探讨的积极性，并良好地把握数学问题的思想来源、定义内涵、解决途径及其有效应用。</p>
<p><b>教学设计思路</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 首先说明本章的主要内容，明确学习目标、学习重点和学习难点；</li> <li>2. 依据简单直观的具体数学趣味问题，明确该问题的起源背景、基本特征，提出解决问题的一般思想方法、具体解决方案和实际操作步骤；</li> <li>3. 参考不同类型问题的具体解决方法，探讨数学学科的重要思想方法的灵活应用策略；</li> <li>4. 依照具体问题的归纳总结，提出数学问题处理方法和思路的广泛灵活应用，并以严格的数学描述形式予以展示，通过注意事项的加强说明，使学生明确相应问题的表述形式、深刻含义、存在条件及其应用意义，从而使学生能够较为准确地把握典型的数学趣味问题。</li> </ol>
<p><b>学习方法</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 通过具体问题的详细讨论过程，了解解决各种不同类型的数学趣味问题的基本思想方法和具体操作步骤，注意引导学生对数学问题的基本概念进行深入分析和全面掌握；</li> <li>2. 对于具体问题的详细介绍，要求逐条展开，同时借助问题背景、性质特征、几何解释和理论说明加强学生对具体问题的有效掌握，并明确该问题的基本用途和使用价值。</li> </ol>

教学过程		
教学环节安排	教学内容	教学方式媒体使用
新课引入	 <p>The image is a vibrant summer-themed graphic. It features a bright sun shining through green palm fronds against a blue sky. The text 'Summer Holiday' is written in a large, elegant font, with 'It is travel time!' below it. At the bottom, the chapter title '第六章 递推循环回归' is displayed in a bold, black font. The background includes a sandy beach with a blue starfish and a yellow starfish.</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 介绍本章的基础内容；</li> <li>2. 利用浅显的初等数学问题引入“递推、循环与回归”，说明其在数学领域的重要性；</li> <li>3. 注意强调“递推、循环与回归”的思想方法在科技前沿领域中的重要价值，并将其与计算机学科紧密结合；</li> </ol>

新课教学

### § 6.1 不动点

求一元三次方程  $8x^3 + 16x - 9 = 0$  的根

$$8x^3 + 16x - 9 = 0$$



$$(8x^3 + 16x - 9) + x = x$$



$$y = 8x^3 + 17x - 9$$

不动点



$$x = \frac{1}{2}$$

### § 6.2 从宝塔到阴阳数串

九层宝塔

$$1 \times 8 + 1 = 9$$

$$12 \times 8 + 2 = 98$$

$$123 \times 8 + 3 = 987$$

$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$

$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$

$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$

$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$$

$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$$

$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$

1. 借助龙卷风中的“风眼”介绍不动点的概念；
2. 提出问题；
3. 请学生思考解决，并讨论其思路的合理性；
4. 给出结论，予以进一步说明；

1. 展现著名宝塔的图片，并介绍其重要意义和价值所在；
2. 请学生关注宝塔的层数，并总结规律；
3. 给出由阴阳数串构成的九层宝塔；

### 十一层宝塔

$$9 \times 9 + 7 = 88$$

$$98 \times 9 + 6 = 888$$

$$987 \times 9 + 5 = 8888$$

$$9876 \times 9 + 4 = 88888$$

$$98765 \times 9 + 3 = 888888$$

$$987654 \times 9 + 2 = 8888888$$

$$9876543 \times 9 + 1 = 88888888$$

$$98765432 \times 9 + 0 = 888888888$$

$$987654321 \times 9 + (-1) = 8888888888$$

$$9876543210 \times 9 + (-2) = 88888888888$$

$$9876543210\bar{1} \times 9 + (-3) = 888888888888$$

### 对称数

$$11 \times 11 = 121$$

$$111 \times 111 = 12321$$

$$1111 \times 1111 = 1234321$$

$$11111 \times 11111 = 123454321$$

$$111111 \times 111111 = 12345654321$$

$$1111111 \times 1111111 = 1234567654321$$

$$11111111 \times 11111111 = 123456787654321$$

$$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$$

1. 给出十一层宝塔；
2. 请学生关注这些基础运算所蕴含的内在关联，特别是依据代数学“运算”概念的高层次理解方式；

1. 给出对称数构成的宝塔结构；
2. 激励学生对此类问题的收集热情；

### § 6.3 心有灵犀一点通

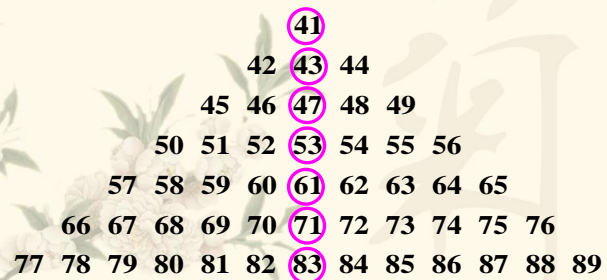
猜你心中所想之数

1. 请你在纸上书写一个多位数；
2. 将此数乘上89，得出乘积之后，把积的末位去掉；在上一位加上被去掉的末位数的9倍；
3. 反复执行这种运算，直到成为89为止；
4. 将每次去掉的末位数按照先后顺序告诉我；
5. 我猜中你心中所想之数。

1. 给出“读心术”的引人之处，请学生参与其中；
2. 与学生进行教学互动，以出人意料的结果激发学生探讨问题成因；

### § 6.4 素数宝塔

欧拉三角形



.....  
素数

1. 介绍著名数学家欧拉的人物生平与事迹；
2. 讲解欧拉三角形对素数的重要意义；

## § 6.5 轮换对称之美

紫砂名壶上的题字



可以清心也

也可以清心

心也可以清

清心也可以

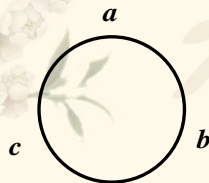
以清心也可

轮换对称之美——余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



1. 给出现实生活中的轮换对称特色;

1. 给出数学公式中的轮换对称性;

## § 6.6 循环素数

### 1. 两位循环素数:

13和31 17和71 37和73 79和97

### 2. 三位循环素数:

113, 131和311 337, 373和733 199, 991和919

### 3. 四位循环素数:

1931, 9311, 3119和1193

### 4. 五位循环素数: ? ? ? ?

## § 6.7 连分数

简单连分数形如下式:  $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$  } 有限连分数  
无限连分数

或简记为:  $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$

有限连分数  $\xrightarrow{\text{繁分数化简}}$  普通的分数

???

1. 介绍循环素数的基本问题;
2. 介绍已有结论, 激励学生做出进一步的讨论;

1. 介绍连分数的概念及其特色;
2. 引入分数化简及其逆问题;
3. 请学生思考;



有限连分数 ← 欧几里德算法 普通的分数  
辗转相除法

普通的分  
 数:  $\frac{m}{n} = a_1 + \frac{p}{n} = a_1 + \frac{1}{\frac{n}{p}}$   
商数  $a_1$  余数  $p$

$\frac{n}{p} = a_2 + \frac{q}{p} = a_2 + \frac{1}{\frac{p}{q}}$   
商数  $a_2$  余数  $q$

$\frac{m}{n} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$

辗转相除法举例

分数:  $\frac{251}{802}$

$q_2 = 5$	251    802	<span style="color: magenta;">商数</span> $q_1 = 3$
	245    753	
$q_4 = 6$	6    49	$q_3 = 8$
	6    48	

$\frac{251}{802} = 3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{8 + \frac{1}{6}}}$

1. 介绍欧几里德算法的基本思想方法;
2. 令学生看到基础运算的强大力量;

1. 以具体实例进行讲解, 帮助学生理解欧几里德算法;

### 连分数趣事

1. 圆周  $3.14159 = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{25 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}}}$

率：  
其各次近似值为： $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \dots$

祖冲之

疏率

密率

2. 阴历的月大月 朔望月有29.5306天

小： $0.5306 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{33 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}}$

其各次渐近分数

为： $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{8}{15}, \frac{9}{17}, \frac{26}{49}, \dots, \frac{867}{1634}, \frac{893}{1683}$

### 3. 循环连分数：

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562\dots$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}}$$

$$\sqrt{3} \approx 1.732050807\dots$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}$$

$$\sqrt{5} \approx 2.236067977\dots$$

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}}}$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887\dots$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}$$

1. 介绍连分数的趣事，进一步激发学生对连分数问题的浓厚兴趣；

1. 介绍连分数与无理数之间的有趣关系；

### § 6.8 小姑娘排队

今有四个孩子排成一行，其中有男有女，也可以全是男孩或全是女孩。特别规定：女孩不能落单，即要么没有女孩，如果有女孩的话必须两个女孩并肩排在一起。问：可以有多少种排法？



1. 介绍问题；
2. 请学生思考解决该问题；

1. 以具体图示说明问题；

课堂小结	<ol style="list-style-type: none"><li>1. 本章的讲授过程中，应该注意通过简单易懂的基础问题，帮助不同专业、不同年级的学生理解递推、循环与回归对于数学科学而言的重要性；</li><li>2. 注意将数学的基础思想方法“递推、循环与回归”与计算机相结合，令学生对于典型数学思想方法与现代科技工具结合的范例能够具备基本认识；</li></ol>	
课后反思		